6/3/18

Αρχή μεταφοράς (συμβολικών ακολουθιών)

$(X,\rho)$, $(Y,d)$ μετρικοί χώροι $f: X \to Y$ συναρτ.

$x_0 \in X$

Τ.Α.Ε.Ι: (i) $f$ συνεχής στο $x_0$

(ii) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $X$ αν $x_n \to x_0$ τότε $f(x_n) \to f(x_0)$

Πρόταση: Έστω $(X,\rho)$, $(Y,d)$, $(Z,\sigma)$ τρεις μετρικοί χώροι και $x_0 \in X$. Αν η $f$ $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ δύο συναρτήσεις και $x_0 \in X$. Αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$ και η $g$ συνεχής στο $f(x_0)$. Τότε $g\circ f: X \to Z$ είναι συνεχής στο $x_0$

Απόδειξη: Με αρχή μεταφοράς. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $X$ με $x_n \to x_0$

Εφόσον η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$ προκύπτει $f(x_n) \to f(x_0)$

Εφόσον η $g$ είναι συνεχής στο $f(x_0)$ προκύπτει $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$

δηλ. $(g\circ f)(x_n) \to (g\circ f)(x_0)$

Επομένως η $g\circ f$ είναι συνεχής στο $x_0$.

Πραγματικές συναρτήσεις: Αν $X$ τυχόν σύνολο πραγματική συνάρτηση (με π.ο. το $X$) ονομάζεται κάθε συνάρτηση $f: X \to \mathbb{R}$

Αν $f,g: X \to \mathbb{R}$ ορίζονται οι $f+g$, $f\cdot g$, $\lambda f$ για $\lambda \in \mathbb{R}$
$X \to \mathbb{R}$

με πράξεις οριζόμενες κατά σημείο δηλ.

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$
$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad \forall x\in X$$

Αν $g(x)\neq 0 \ \forall x\in X$ ορίζεται και η $\frac{f}{g}: X\to\mathbb{R}$

με $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x\in X$

<u>Πρόταση</u>: Έστω $(X,\rho)$ μ.χ. $x_0\in X$ και $f,g: X\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $x_0$. Τότε

α) Η $f+g$ είναι συνεχής στο $x_0$

β) Η $fg$ —— // ——

γ) Η $\lambda f$ —— // ——

δ) Αν $g(x)\neq 0 \ \forall x\in X$, η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο $x_0$.

<u>Απόδειξη</u>: Με αρχή μεταφοράς

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $X$ με $x_n\to x_0$. Τότε εφόσον οι $f,g$ είναι συνεχείς στο $x_0$ θα έχουμε $f(x_n)\to f(x_0)$, $g(x_n)\to g(x_0)$

Από τα γνωστά (από ΑΠ Ι) για τις σύγκλιση ακολουθιών πραγματικών αριθμών, προκύπτει

$$f(x_n)+g(x_n)\to f(x_0)+g(x_0)$$
$$f(x_n)\cdot g(x_n)\to f(x_0)\cdot g(x_0)$$
$$\lambda f(x_n)\to \lambda f(x_0)$$

Άρα οι $f+g$, $f\cdot g$, $\lambda f$ είναι συνεχείς στο $x_0$

Αν $g(x)\neq 0$, $\forall x\in X$ τότε $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\to\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ άρα η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο $x_0$.

# Ομοιόμορφη συνέχεια

**Ορισμός**. Αν $(X,\rho)$, $(Y,d)$ είναι μ.χ. και $f: X \to Y$ μια συνάρτηση. Η $f$ λέγεται ομοιόμορφα συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ αν $\rho(x,y) < \delta$ τότε

$$d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

**Παρατήρηση**: Αν η $f$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz (δηλ $\exists c > 0$ $d(f(x), f(y)) \leq c\,\rho(x,y)$ $\forall x, y \in X$, τότε η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

**Απόδειξη**: Έστω $\varepsilon > 0$ Έστω $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$ κ.τ.λ.

**Πρόταση**: Έστω $(X,\rho)$ μ.χ.

α) Αν $x_0 \in X$ και ορίσουμε τη συνάρτηση $f: X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \rho(x, x_0)$.
Η $f$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με σταθερά 1 άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής.

β) Αν $A \subseteq X$ με $A \neq \emptyset$ και ορίσουμε τη συνάρτηση $f: X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \rho(x, A)$

(Υπενθύμιση: $\rho(x,A) = \inf\{\rho(x,y),\ y \in A\}$)

Τότε η $f$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με σταθερά 1, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής.

**Απόδειξη**: α) Έχουμε δείξει ότι $|\rho(x, x_0) - \rho(y, x_0)| \leq \rho(x,y)$ $\forall x, y \in X$ άρα η $f$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με σταθερά 1

β) Έχουμε αποδείξει ότι $|\underset{f(x)}{\underset{\shortparallel}{\rho(x,A)}} - \underset{f(y)}{\underset{\shortparallel}{\rho(y,A)}}| \leq \rho(x,y)$ $\forall x, y \in X$

άρα η $f$ ικανοποιεί Lipschitz με σταθερά 1 (άρα είναι ομ. συνεχής)

## Ανοικτά και κλειστά σύνολα σε μετρικούς χώρους

## Η τοπολογία ενός μετρικού χώρου

<u>Ορισμός</u>: Έστω $(X,\rho)$ μετρικός χώρος $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$

α) Η ανοικτή μπάλα (ως προς $\rho$) κέντρου $x_0$ και ακτίνας $\varepsilon$ είναι το σύνολο $B_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) < \varepsilon\}$

β) Η κλειστή μπάλα (ως προς $\rho$) κέντρου $x_0$ και ακτίνας $\varepsilon$ είναι το σύνολο $\hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) \le \varepsilon\}$

γ) Η σφαίρα (ως προς $\rho$) κέντρου $x_0$ και ακτίνας $\varepsilon$ είναι το σύνολο

$$S_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) = \varepsilon\}$$

<u>Σημείωση</u>: Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης ως προς το ποια μετρική χρησιμοποιούμε στο $X$ ~~υπάρχει~~ μπορεί να παραλειφθεί ο δείκτης $\rho$.

<u>Παραδείγματα</u>: α) Αν $(X,\rho)$ ο διακριτός μ.χ.

$$\left(\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}\right) \quad x_0 \in X, \ \varepsilon > 0$$

$$B_\rho(x_0,\varepsilon) = \begin{cases} X, & \varepsilon > 1 \\ \{x_0\}, & 0 < \varepsilon \le 1 \end{cases}$$

$$\hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon) = \begin{cases} X, & \varepsilon \geq 1 \\ \{x_0\}, & 0 < \varepsilon < 1 \end{cases}$$

$$S_\rho(x_0,\varepsilon) = \begin{cases} X - \{x_0\}, & \varepsilon = 1 \\ \emptyset, & \varepsilon \neq 1 \end{cases}$$

β) Στο $\mathbb{R}$ με τη ~~[illegible]~~ σύνηθη μετρική ρ $\rho(x,y)=|x-y|$

Αν $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon>0$

$B_\rho(x_0,\varepsilon) = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ ανοικτό διάστημα

$\hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon) = [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$

$S_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\}$

γ) Στον $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$ όπου $\rho_2$ η ευκλείδεια μετρική

$(\rho_2(a,b),(\gamma,\delta)) = \sqrt{(\gamma-a)^2+(\delta-b)^2}$

Αν $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon>0$

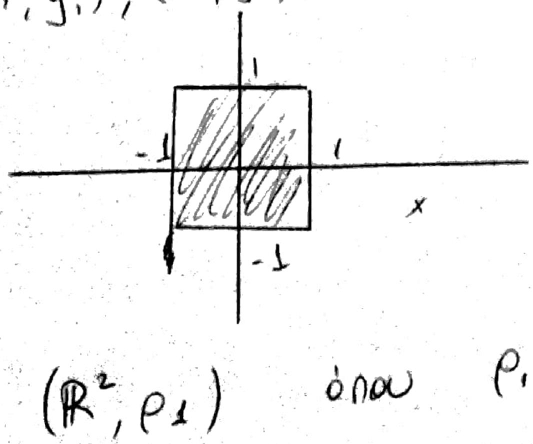
$B_\rho((x_0,y_0),\varepsilon) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq \varepsilon$

Ειδικότερα $B_{\rho_2}((0,0),1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2<1\}$

δ) Στον $(\mathbb{R}^2, \rho_\infty)$

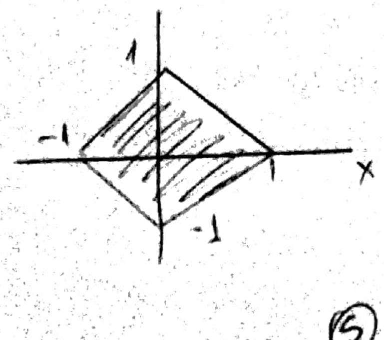
$B_{\rho_\infty}((0,0),1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, |x|<1, |y|<1\} = (-1,1)\times(-1,1)$

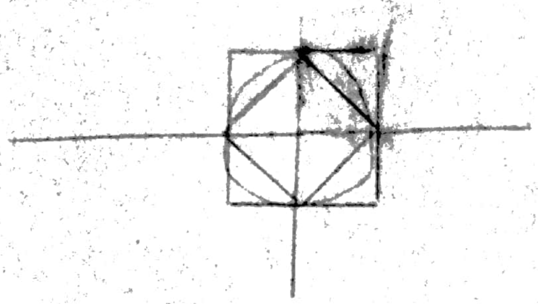
$(\rho_\infty(x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{|x_2-x_1|, |y_2-y_1|\}$




ε) Στον $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$ όπου $\rho_1((a,b),(\gamma,\delta)) = |\gamma-a|+|\delta-b|$

$B_{\rho_1}((0,0),1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad |x|+|y|<1\}$





Για $p>1$

$B_{p_1}((0,0),1) = \{ x,y \in \mathbb{R}$ [illegible] $1\}$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $(X,\rho)$ μετρικός χώρος και $G \subseteq X$. Το $G$ καλείται ανοικτό (ως προς $\rho$) (ή $\rho$-ανοικτό) αν για κάθε $x_0 \in G$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x_0,\varepsilon) \subseteq G$

<u>Πρόταση</u>: Έστω $(X,\rho)$ μ.χ. Κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$.

Θα δ.ο. η ανοικτή μπάλα $B_\rho(x_0,\varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο.

[και αναζητούμε $\delta > 0$ $B_\rho(y,\delta) \subseteq B_\rho(x_0,\varepsilon)$ τότε $\rho(y,x_0) < \varepsilon$

Θέτουμε $\delta = \varepsilon - \rho(y,x_0)$

Θ.δ.ο. $B_\rho(y,\delta) \subseteq B_\rho(x_0,\varepsilon)$

Έστω $z \in B_\rho(y,\delta)$ τότε $\rho(z,y) < \delta$

Τότε $\rho(z,x_0) \leq \rho(z,y) + \rho(y,x_0) < \delta + \rho(y,x_0) = \varepsilon$

Άρα $\rho(z,x_0) < \varepsilon$ Άρα $z \in B_\rho(x_0,\varepsilon)$

<u>Παραδείγματα</u>:

α) Στο διακριτό μετρικό χώρο $(X,\rho)$ όλα τα υποσύνολα του $X$ είναι ανοικτά. Πράγματι αν $A \subseteq X$. Τότε για κάθε $x_0 \in A$ έχουμε $B_\rho(x_0,1) = \{x_0\} \subseteq A$. Άρα το $A$ είναι ανοικτό.

β) Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική τα σύνολα $(\alpha,\beta)$ όπου $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ είναι ανοικτά σύνολα

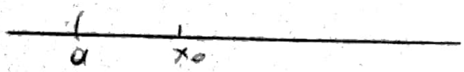
**Απάντηση**: Τότε $x_0 \in (a,b)$ $\quad a < x_0 < b$

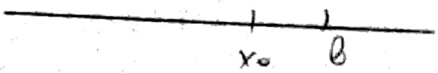

Θέτουμε $\varepsilon = \min\{x_0 - a,\ b - x_0\}$. Τότε $B(x_0,\varepsilon) \subseteq (a,b)$

Άρα $(a,b)$ ανοικτό.

Επίσης, τα σύνολα της μορφής $(a,+\infty)$, $(-\infty, b)$ είναι ανοικτά.

Παρόμοια




Το σύνολο $\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοικτό (διότι κάθε ανοικτό διάστημα περιέχει και άρρητους)

Αν $a<b$ το σύνολο $(a,b]$ δεν είναι ανοικτό, διότι δεν υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \subseteq (a,b]$

(ο εγκλεισμός δεν ισχύει διότι $b+\frac{\varepsilon}{2} \in (b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ ενώ $b+\frac{\varepsilon}{2}\notin(a,b]$)

Επίσης το $[a,b)$ δεν είναι ανοικτό

(για κάθε $\varepsilon>0$ $\ a-\frac{\varepsilon}{2}\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ ενώ $a-\frac{\varepsilon}{2}\notin[a,b)$)

Επίσης κανένα πεπερασμένο σύνολο δεν είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$ με συνήθη μετρική